www.ceenacademy.com

الرياضيات

لطلبة الثانوية العامة

العلمي والصناعي

الأستاذ: احمد طلافحة

0796046414

تأسيس رياضيات علمي + صناعي

المعادلة والاقتران:

الاقتران: هو علاقة ما بين متغيرين اثنين هما (y, x) شرط أن كل قيمة في (x) ترتبط بقيمة واحدة في (y)

$f(x) = x^2 + 4$

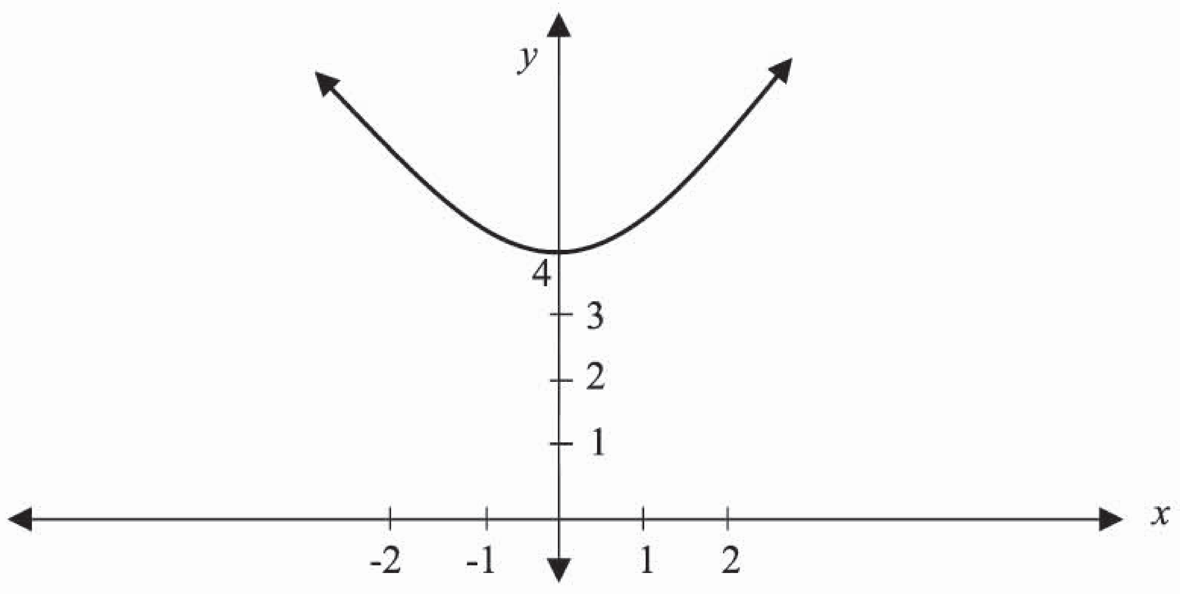
مدخلات قيم (x) ← عمليات حسابية $+ - \div \times \sqrt{\ }$ ← مخرجات قيم y

لاحظ أن إذا كانت $x = 0$ ← $y = 4$ ← $(0,4)$

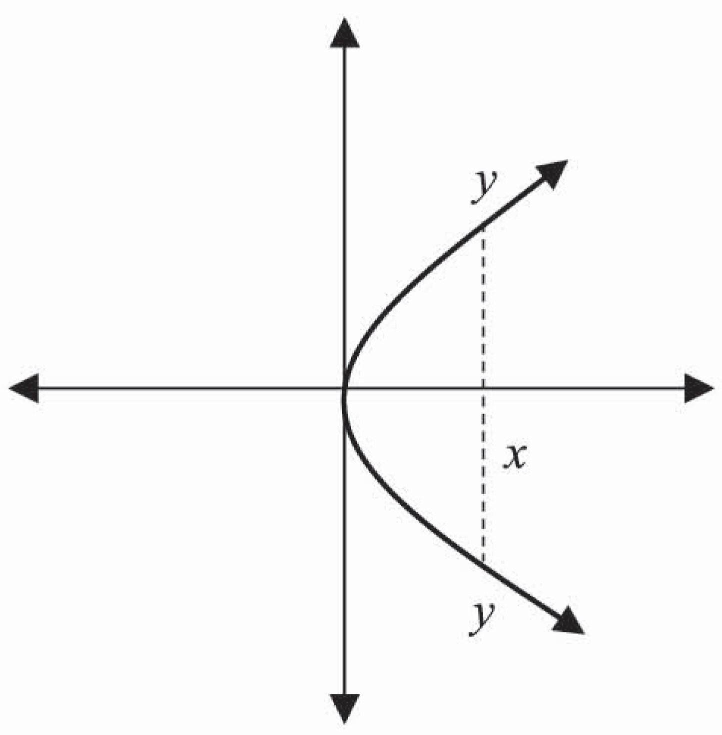
$x = 1$ ← $y = 5$ ← $(1,5)$

$x = -1$ ← $y = 5$ ← $(-1,5)$

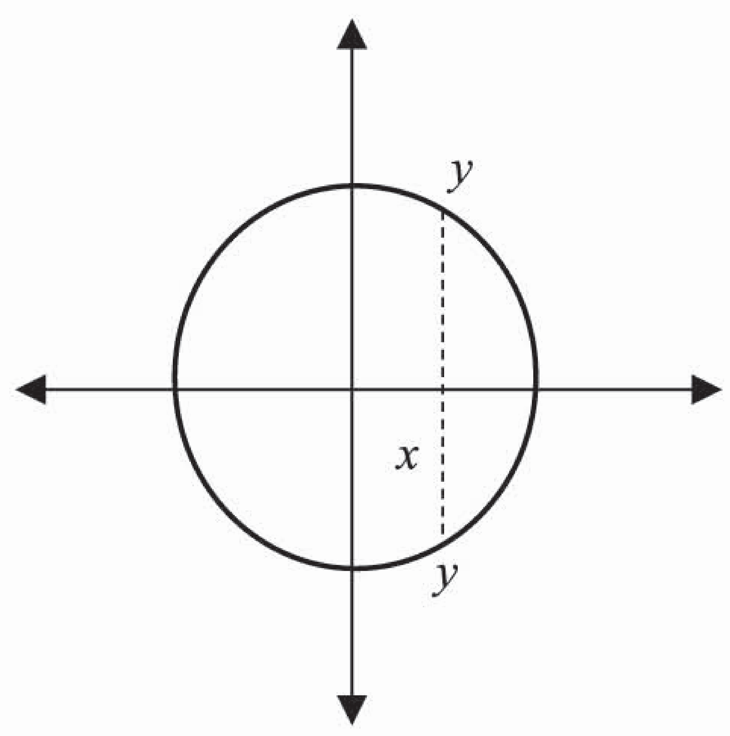
بعد تكوين الأزواج المرتبة ← ينتج منحنى $f(x)$



لكن في حالة المعادلات، يمكن لقيم (x) أن ترتبط مع أكثر من قيمة لـ (y)، مثل معادلة الدائرة.



قيمة x ارتبطت مع قيمتين لـ y



ليس اقتران

مجموعات الأعداد:

{الأعداد الحقيقية} - R – $\{Real\ Numbers\}$

الأعداد النسبية ← Q

الأعداد الصحيحة ← Z

الأعداد الكلية ← W

I ← الأعداد غير النسبية

W → $\{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}Z^+$

Z → $\{0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots\}$

Q → $\{\frac{3}{2}, 0.9, -\frac{1}{3}, 5, -2 \ldots\}$

I → $\{\sqrt{2}, \sqrt{7}, e, \pi \ldots\}$

R → جميع ما ذكر لاحقًا

أنواع الاقترانات

أولًا: كثيرات الحدود

هي اقترانات مكونة من مقدار أو أكثر من المقادير الجبرية، بشرط أن يكون أسسها أعداد طبيعية، (أعداد كلية) $\{W\}$

درجات كثيرات الحدود:

1) الاقتران الثابت.
2) الاقتران الخطي
3) العبارة التربيعية
4) الاقتران التكعيبي

سيتم تفصيل كل درجة بشكل منفصل

1) الإقتران الثابت: على صيغة $f(x) = a$

لا يحتوي على متغير مثل (x)

$f(x) = \pi$ $f(x) = -\frac{1}{2}$ $f(x) = 4$

$f(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $f(x) = \sqrt{3}$ $f(x) = e^3$

تذكر: المجال: هو قيم (x) المسموح التعويض فيها داخل الاقتران

المدى: هي قيم (y) الناتجة من تعويض قيم (x) في الاقتران.

قاعدة مهمة جدًا:

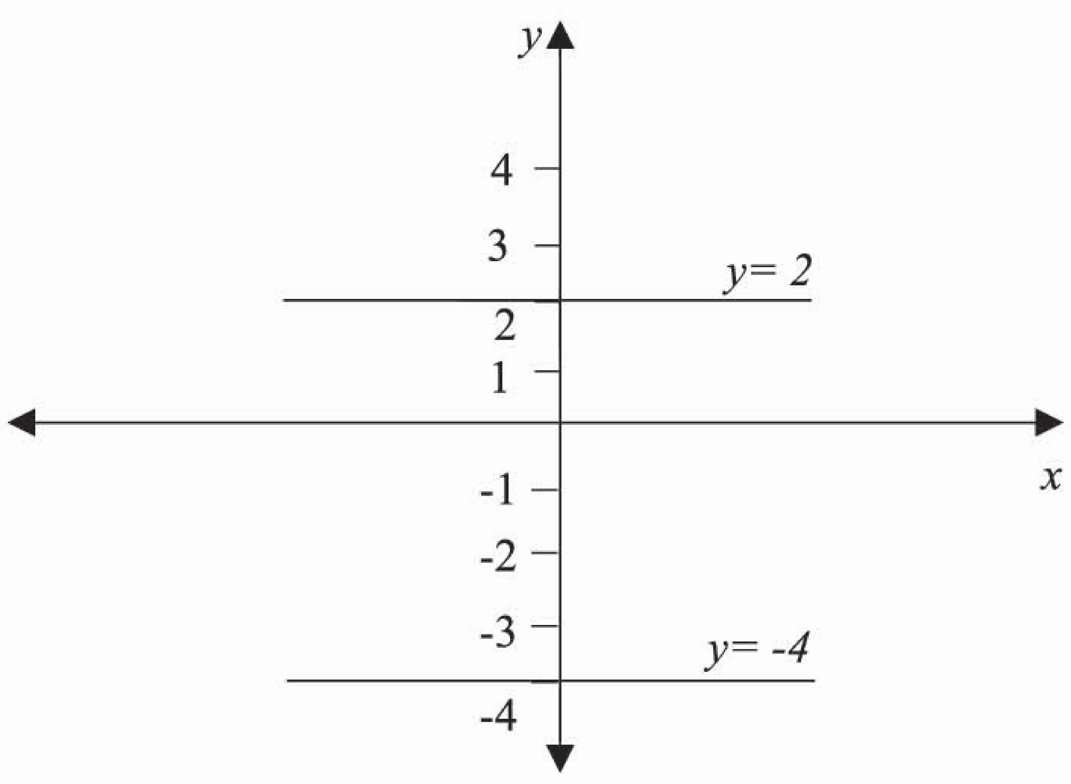
مجال اقترانات كثيرات الحدود بكل درجاته هو الأعداد الحقيقية $\{R\}$، لكن المدى يختلف من اقتران لآخر.

مثال: ما هو مجال ومدى الاقترانات التالية:

1) $f(x) = 4$
المجال $\rightarrow$ R
المدى $\rightarrow$ $\{4\}$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}$
المجال $\rightarrow$ R
المدى $\rightarrow$ $-\frac{1}{2}$

التمثيل البياني للاقتران الثابت:



2) الاقتران الخطي: على صيغة: $f(x) = ax + b$، حيث $a \neq 0$

أمثلة على الاقتران الخطي:

1) $f(x) = 5x - 4$

2) $f(x) = 6 - x$

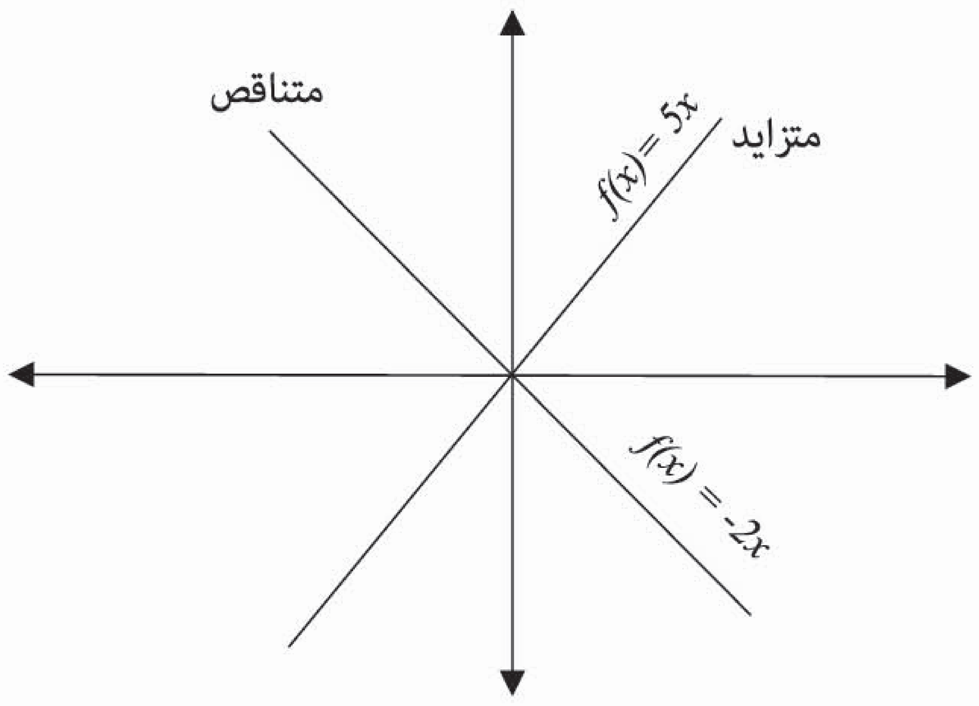
3) $f(x) = \frac{3x+1}{7}$

4) $f(x) = -5x$

ملاحظة مهمة:

إذا كان معامل (x) في الاقتران الخطي موجب، فإن منحنى الاقتران يكون متزايد

أما إذا كان معامل (x) في الاقتران الخطي سالب، فإن منحنى الاقتران يكون متناقص.



حل المعادلة الخطية:

عملية حل المعادلة هو إيجاد قيمة المجهول بالعادة يكون (x) وجعل المجهول موضوع القانون أي إن في طرف من أطراف المعادلة.

مكونات المعادلة ⟸ | طرف يمين = طرف يسار |

1- أي عملية حسابية تحدث على طرف من أطراف المعادلة يجب أن تحدث على الطرف الآخر.

2- يتم التخلص من عملية الجمع بالطرح والعكس صحيح.

3- يتم التخلص من عملية القسمة بالضرب والعكس صحيح.

مثال: أوجد حل المعادلات التالية:

1) $4x + 1 = 25$

2) $6 - 5x = -14$

3) $\frac{2x}{5} - 3 = 4$

4) $\frac{x-2}{3} = 4$

5) $5x + 3 = -2x + 4$

6) $4x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

7) $3(x + 1) = 6$

الحل:

1) $4x + 1 = 25$
$\quad -1 \quad -1$
$\longrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{24}{4} \longrightarrow \boxed{x = 6}$

2) $6 - 5x = -14$
$\quad 6 \qquad -6$

3) $\frac{2x}{5} - 3 = 4$
$\qquad +3 \quad +3$

4) $\frac{x-2}{3} = 4$

5) $5x + 3 = -2x + 4$
$\quad +2x \qquad +2x$

6) $4x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$
$\qquad +\frac{1}{3} \quad +\frac{1}{3}$

7) $\frac{3(x+1)}{3} = \frac{6}{3}$

ملاحظة

جميع الحلول متوفرة من خلال البطاقة المجانيه على منصة سين التعليميه 0790112211 للتواصل والحصول على البطاقة

التمثيل البياني للاقتران الخطي:

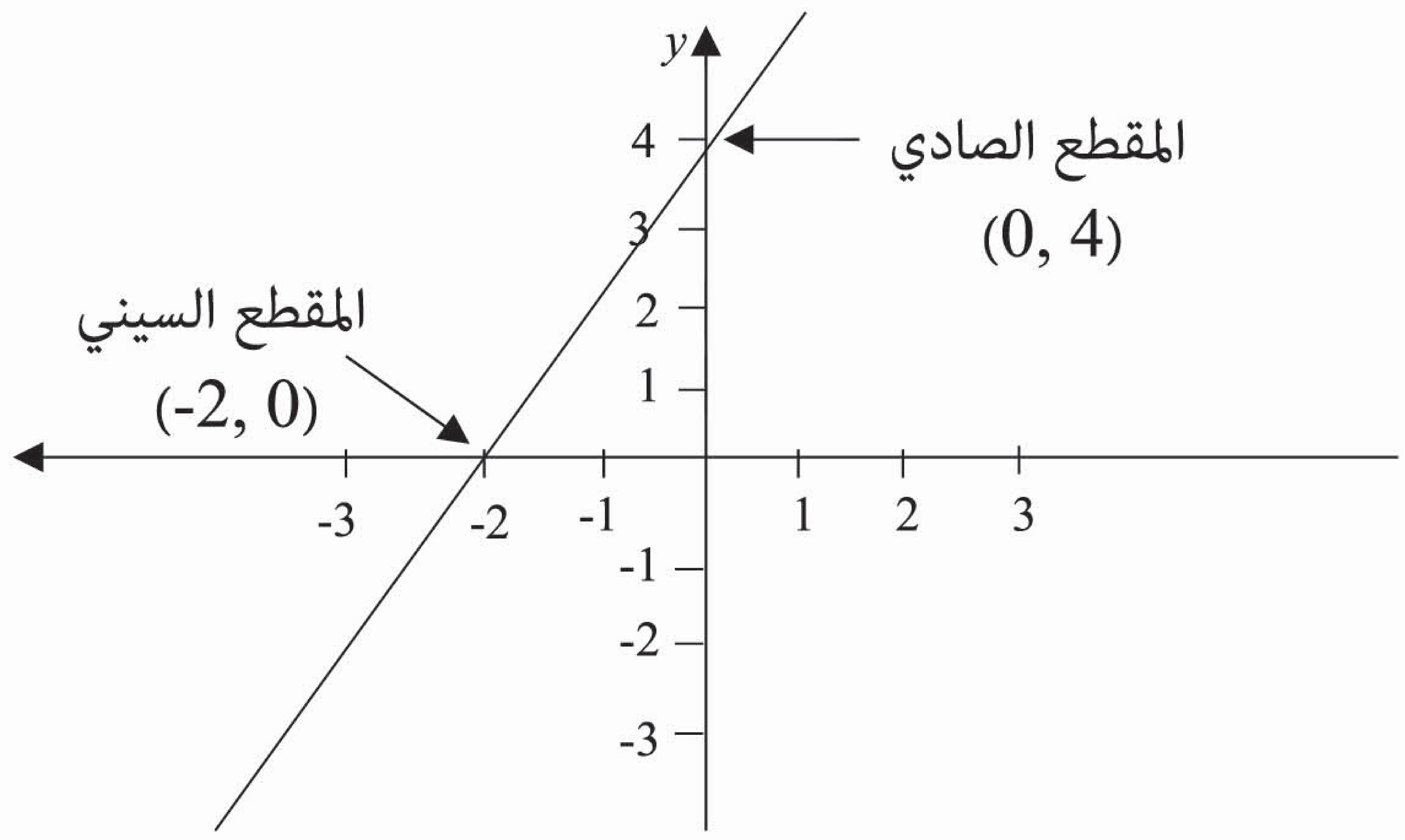
مثال: أوجد منحنى $f(x)$ ومثله بيانيًا:

1) $f(x) = 2x + 4$

الحل:

x	0	-2
y	4	0

⟸ الأزواج المرتبة ⟸ $(0, 4)$, $(-2, 0)$

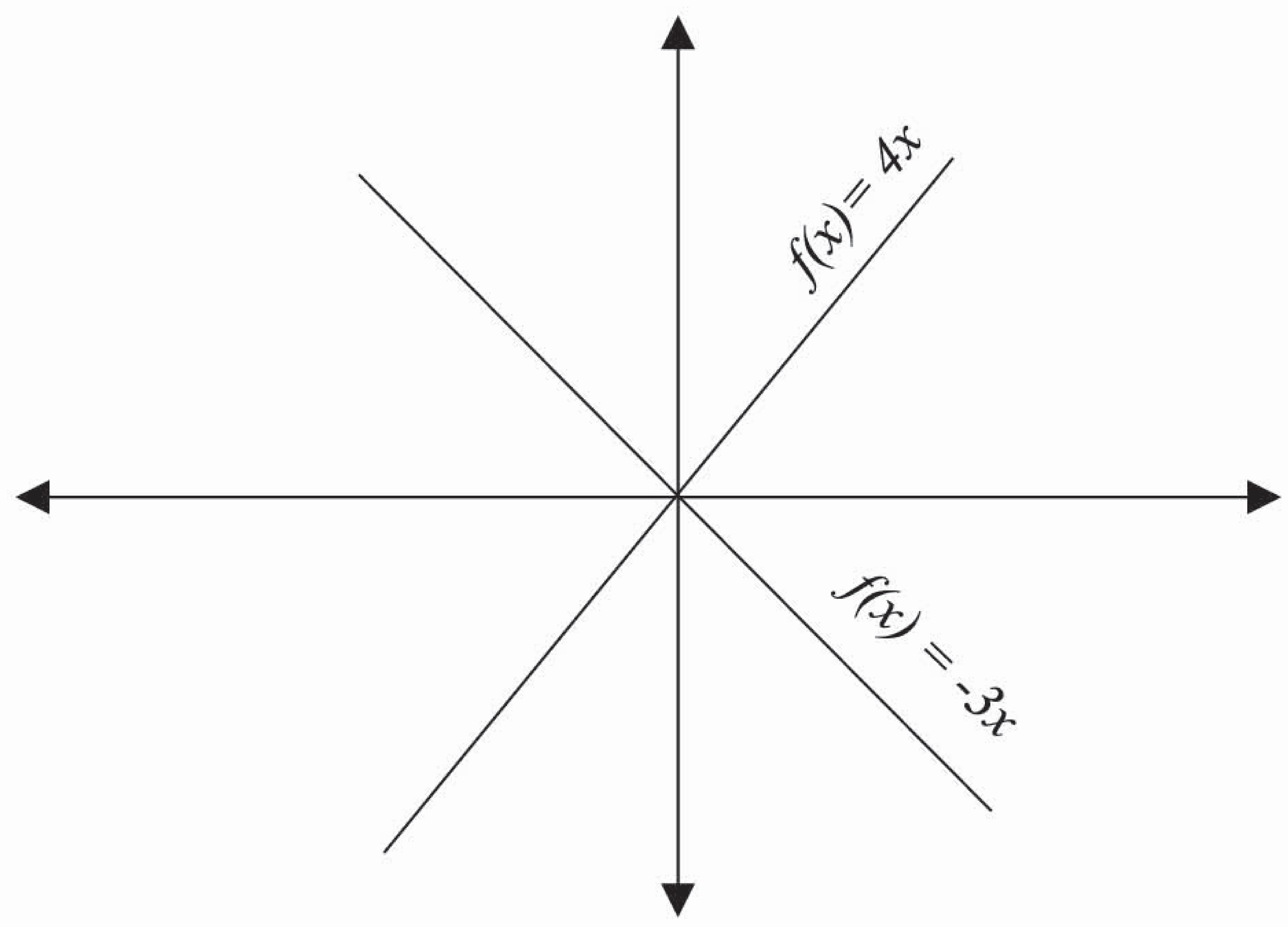


حالة خاصة من الاقتران الخطي وكيفية تمثيله بيانيًا:

مثال: مثل بيانيًا: 2) $f(x) = 4x$ 1) $f(x) = -3x$

★ إذا كان معامل (x) موجب فالاقتران متزايد.

★ إذا كان معامل (x) سالب فالاقتران متناقص



هذه الحالة يكون الاقتران مارًا بنقطة الأصل $(0, 0)$

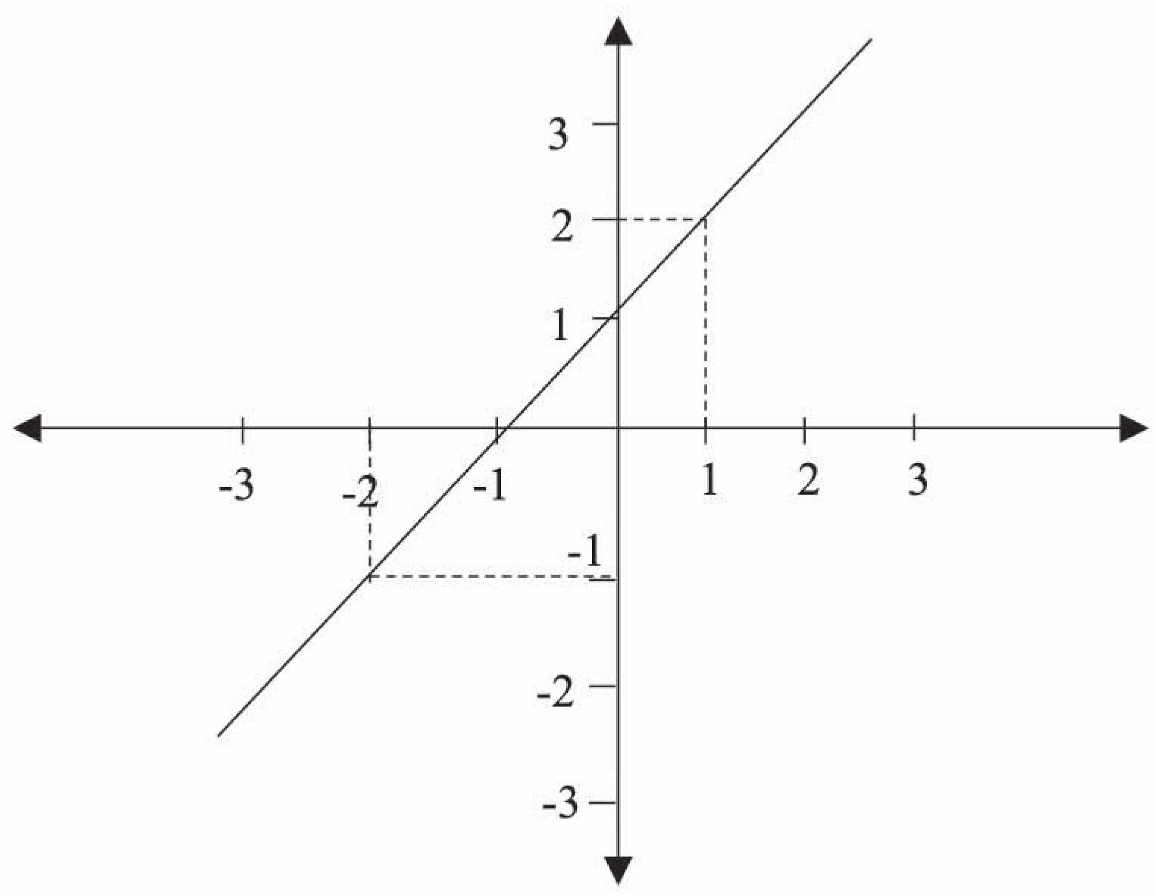
الميل ومعادلة الخط المستقيم

الميل هو خاصية للخطوط المستقيمة، يعبر عن درجة ميلان الخط المستقيم عن الأفق (محور السينات)

قانون الميل إذا عُرف نقطتين في المستوى الإحداثي:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: أوجد ميل القطعة المستقيمة الممثلة بيانيًا:

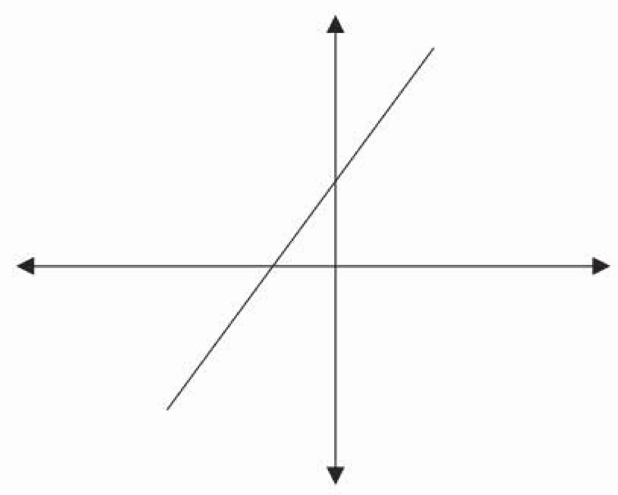


الحل: من خلال الرسم نستنتج أن القطعة المستقيمة تمر بالنقطتين:

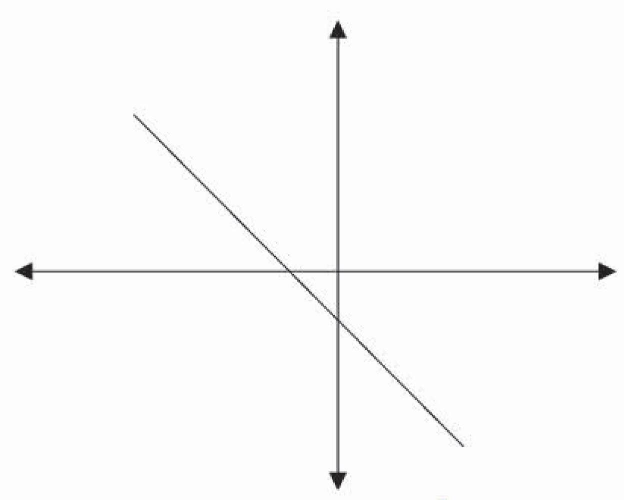
(-2, -1) (1, 2)

$(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$

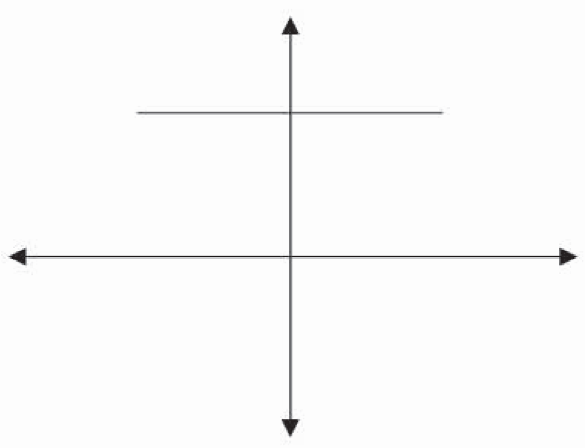
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - -1}{1 - -1} = \frac{3}{2}$$



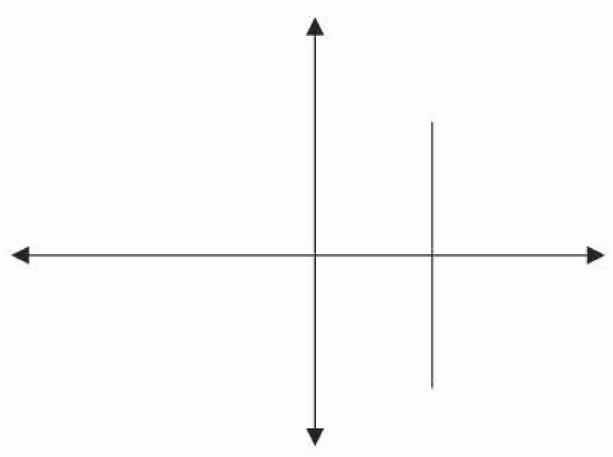
$m > 0$ متزايد



$m < 0$ متناقص



$m = 0$ ثابت أفقي



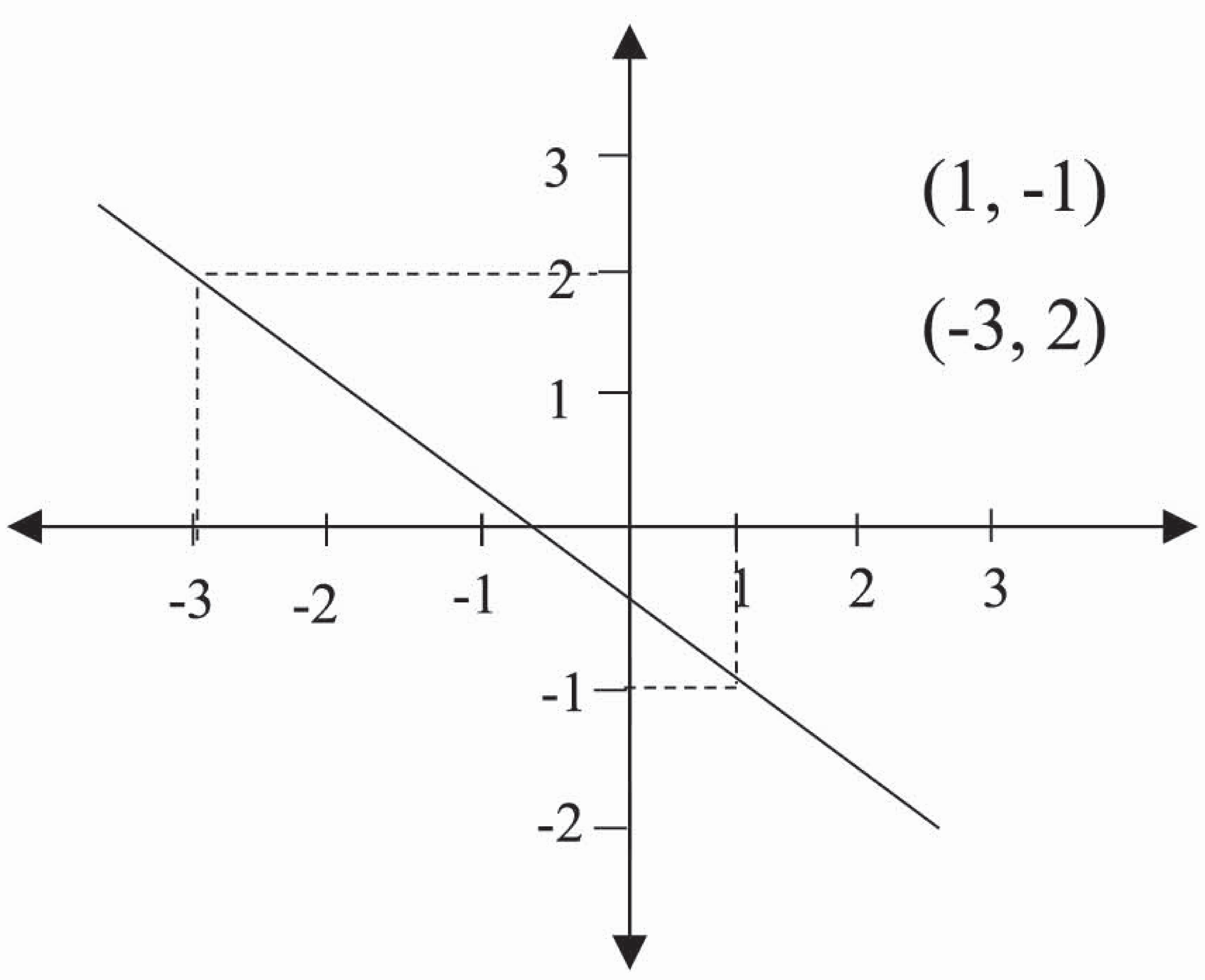
غير معرف = m رأسي عمودي

معادلة الخط المستقيم

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

لإيجاد معادلة الخط المستقيم يجب معرفة الميل ونقطة عليه.

مثال: اعتمادًا على الشكل المجاور أوجد معادلة الخط المستقيم؟



(1, -1)

(-3, 2)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - -1}{-3 - 1} = \frac{3}{-4}$$

$$y - 2 = \frac{-3}{4}(x - 3)$$

$$y - 2 = \frac{-3}{4}(x + 3)$$

$$y - 2 = \frac{-3x}{4} - \frac{9}{4} \rightarrow y = \frac{-3x}{4} - \frac{9}{4} + 2$$

$$y = \frac{-3x}{4} - \frac{9}{4} + \frac{8}{4} \rightarrow y = \frac{-3x}{4} - \frac{1}{4}$$

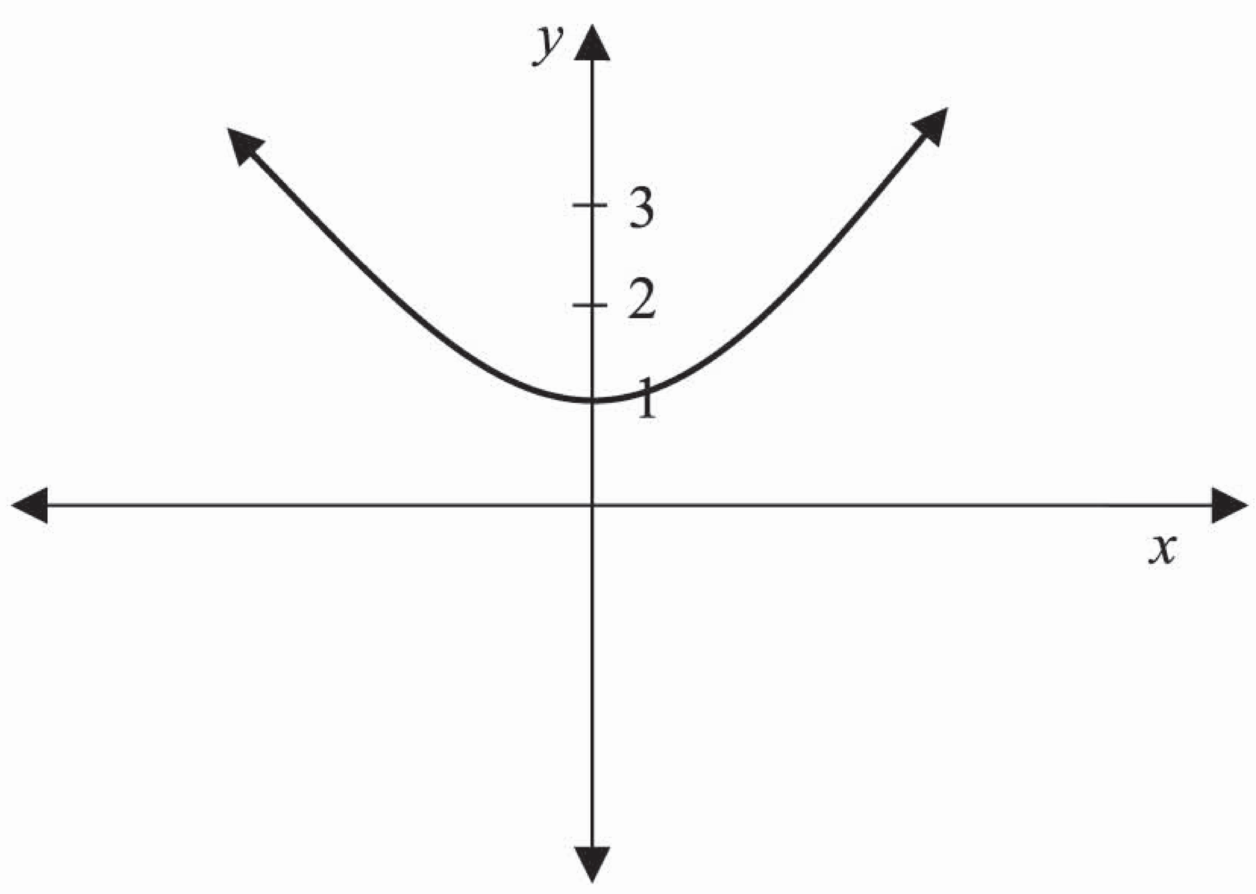
3) الاقتران التربيعي: تكمل على كثيرات الحدود

الصيغة العامة: $f(x) = ax^2 + bx + c$

من الأمثلة على الاقتران التربيعي:

$f(x) = 5x^2 - x$ $\quad$ $f(x) = 9 - 3x^2$ $\quad$ $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

التمثيل البياني للاقتران التربيعي:



$f(x) = x^2 + 1$

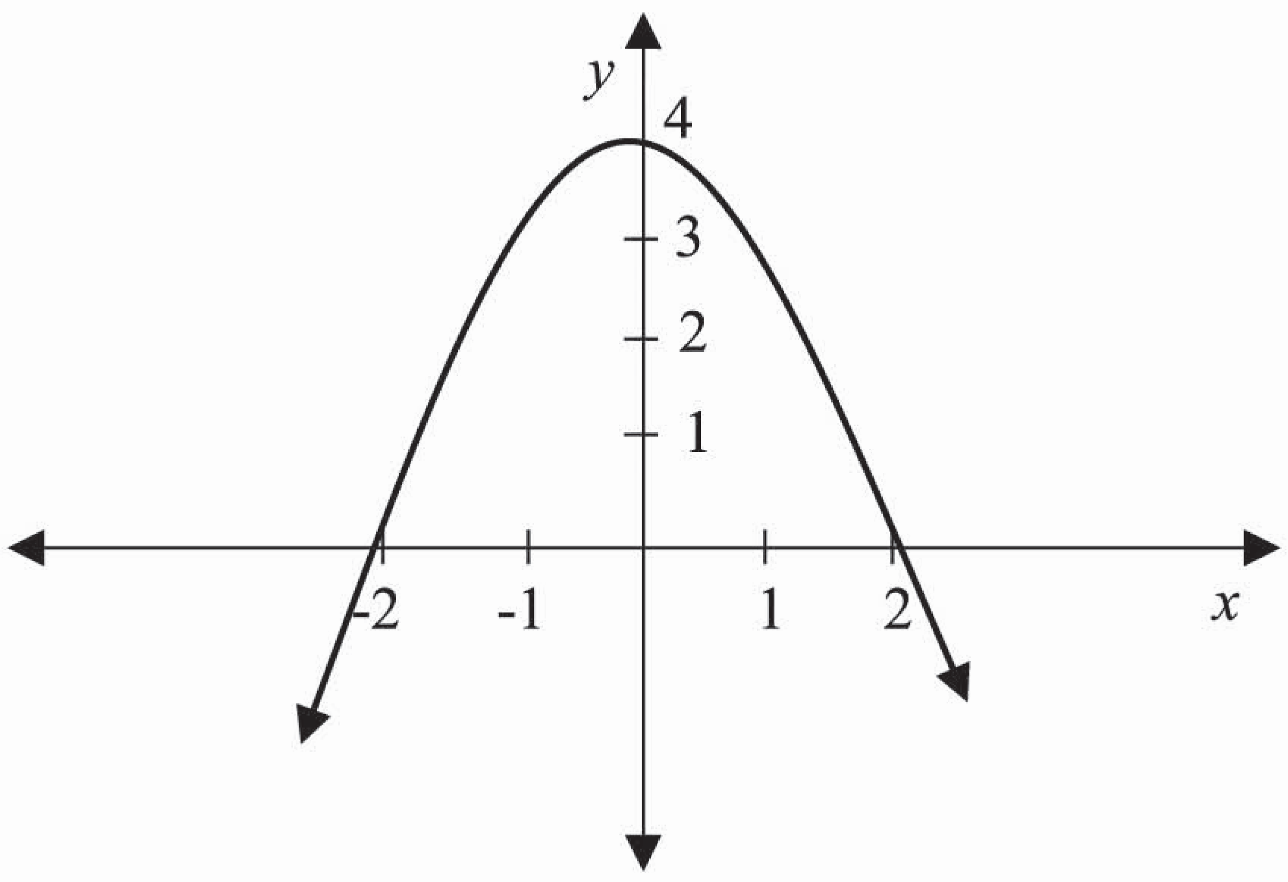
مقعر للأعلى: معامل x^2 موجب

المجال: $\{R\}$

المدى: $[1, \infty)$

المقطع الصادي: $(0,1)$

المقطع السيني لا يوجد



$f(x) = 4 - x^2$

مقعر للأسفل: معامل x^2 سالب

المجال: $\{R\}$

المدى: $[4, -\infty)$

المقطع الصادي: $(0,4)$

المقطع السيني (2.0) $(-2,0)$

مصطلحات رياضية مهمة لنفس المعنى:

1) المقطع السيني. 2) جذور الاقتران. 3) حلول الاقتران. 4) أصفار الاقتران. 5) نقاط تقاطع الاقتران مع محور (x).

مثال: أوجد أصفار الاقتران (جذور) للاقترانات التالية:

1) $f(x) = x^2 - x - 6$

$0 = x^2 - x - 6 \Longrightarrow 0 = (x-3)(x+2)$

$x = 3, -2$

تذكر: عددان حاصل ضربهما (c) ومجموعهما (b)، إذا كانت $a = 1$

أما إذا كانت $a \neq 1$ نبحث عن عددان حاصل ضربهما (c).

2) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

التحقق

$0 = x^2 + 2x - 8 \Longrightarrow 0 = (x-2)(x+4)$

$x = 2, -4$

3) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

4) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

مثال: أوجد حل المعادلات التربيعية التالية:

1) $16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5)(4x+5) = 0 \longrightarrow 4x + 5 = 0 \longrightarrow 4x = -5 \longrightarrow x = \frac{-5}{4}$

2) $3x^2 - 14x - 5 = 0$

3) $0 = 15 - 6x^2 - x \longrightarrow 6x^2 + x - 15 = 0$

4) $0 = 3x^2 - \frac{42x}{4} + \frac{30}{4}$

المميز والقانون العام

تذكر العبارة التربيعية تكون على صيغة $ax^2 + bx + c$

المميز ⟵ $\boxed{b^2 - 4ac}$

حفظ

- موجب ⟵ لها حلّان
- صفر ⟵ حل وحيد
- سالب ⟵ لا يوجد حلول في مجموعة الأعداد الحقيقية

القانون العام: ⟵ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

مثال: أوجد حلول المعادلات التالية، أوجد أصفار الاقتران؟

1) $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$

$0 = 9x^2 - 24x + 16 \longrightarrow (3x-4)(3x-4) = 0$

تأكد من صحة الحل $24x = 12x \times 12x$

$\therefore x = \frac{4}{3}$ لو أوجدت المميز سيكون سالب

2) $0 = 6x + x^2 + 12$

3) $f(x) = -2x^2 - 6x + 4$

$0 = 2x^2 + 6x - 4$ (ضرب السالب) CHECK المميز

$b^2 - 4ac \longrightarrow 36 - 4(2)(-4) = 36 + 32 = 68$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{68}}{4} \rightarrow x = \frac{-6 + \sqrt{68}}{4} \rightarrow x = \frac{-6 - \sqrt{68}}{4}$

4) $f(x) = 3x^2 - 7x - 5$

5) $9x^2 + 5 = 0$

مجموع المربعين عبارة لا تحلل لأنه مميزها سالب

لا يوجد حلول في مجموعة الأعداد الحقيقية

فرق / مجموع المربعين:

★ $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

★ $(a^2 + b^2) \neq 0 \longrightarrow$ مجموع المربعين العبارة لا تحلل لأن مميزها سالب

★ **تمهل:** $(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$

مثال: حلل العبارات التربيعية التالية:

1) $x^2 + 9 = 0 \longrightarrow$ لا تحلل مجموع مربعين مميز سالب

2) $x^2 - 81 = 0 \longrightarrow (x - 9)(x + 9) = 0$

الأصفار $\longleftarrow x = \pm 9$

3) $16 - x^2 = 0 \longrightarrow (4 - x)(4 + x) = 0$

الأصفار $\longleftarrow x = \pm 4$

4) $x^2 - 8 = 0 \longrightarrow (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) = 0$

الأصفار $\longleftarrow x = \pm\sqrt{8}$

تحدٍ: حلل العبارات التالية على أساس فرق بين مربعين؟

1) $x - 9 \longrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)$

2) $(x + 2)^2 - 36 \longrightarrow ((x + 2) + 6)((x + 2) - 6)$

$(x + 8)(x - 4)$

3) $(3 - x)^2 - 25 \longrightarrow ((3 - x) + 5)((3 - x) - 5)$

4) $x^4 - 16 \longrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

العامل المشترك:

مثال: حلل ما يلي:

1) $x^2 + x \longrightarrow$

2) $9x - x^2 \longrightarrow$

3) $x^2 + \frac{x}{3} \longrightarrow$

4) $7x - 3x^2 \longrightarrow$

5) $x^3 - 9x \longrightarrow$

6) $x^2 + 2bx \longrightarrow$

7) $x^3 - 2x^2 - 8x \longrightarrow$

8) $x^4 - x^2 \longrightarrow$

4) الاقتران التكعيبي: أحد أنواع كثيرات الحدود

تذكر مجاله $\{R\}$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

العبارة التربيعية الناتجة في هذه الحالة فقط لا تحلل

مثال: حلل ما يلي:

1) $x^3 - 27 \longrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

2) $1 - x^3 \longrightarrow$

3) $125 - x^3 \longrightarrow$

4) $x^3 + 64 \longrightarrow (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

5) $x^4 + 5x \longrightarrow$

6) $27x^3 + 216 \longrightarrow$

مثال: تحديات على الخفيف (حلل)

1) $(x + 2)^3 - 27 \longrightarrow (x + 2 - 3)((x + 2)^2 + 3(x + 2) + 9)$

2) $8b^2 + (x - 1)^3 \longrightarrow$

3) $125 - (x + 4)^3 \longrightarrow$

القسمة التركيبية

تستخدم القسمة التركيبية لتحليل درجات كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق.

على الرغم من أن القسمة التركيبية تستخدم لتحليل الدرجات العليا لكن هنالك بعض الاستثناءات التي تسرع من الحل.

مثال: حلل ما يلي:

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$

$$f(x) = x^2(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 2)$$

$$= (x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

2) $f(x) = x^4 - 16$

$$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

3) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 8$

$$f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 4)$$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

أولًا يتم إيجاد الأصفار النسبية المحتملة للحد المطلق = $\pm1, \pm2, \pm3$

المعامل الرئيسي = $\pm4, \pm6, \pm12$

بعد التجريب $x = 2$ هو الذي يجعل المعادلة صفرًا.

ترتيب المعاملات

	x^3	x^2	x	ثابت
	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	الباقي: صفر

ضرب

$f(x) = (x - 2)(x^2 + 5x + 6)$

$f(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 2)$

الأصفار ⟵ $x = 2, -3, -2$

مثال: أوجد أصفار الاقتران التالي:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

الأصفار النسبية المحتملة $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

بعد التجريب $x = 1$ هو الذي يجعل المعادلة صفرًا

	x^3	x^2	x	ثابت
	1	4	1	6-
1		1	5	6
	1	5	6	0

$f(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$

$\quad = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

الأصفار $x = 1, -3, -2$

تمرين (1): أوجد أصفار الاقترانات التالية:

1) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 8x$

2) $f(x) = x^4 - 2x + 1$

تمرين (2): أوجد حل المعادلات التالية:

1) $(x - 1)3 - 8 = 0$

2) $x^4 - 16 = 0$

3) $9x^4 - 81x^2 = 0$

قوانين الأسس

★ في حالة الضرب الأسس تُجمع شرط أن يكون الأساس نفسه.

1) $x^{n} \,.\, x^{m} - x^{n+m}$

★ في حالة القسمة الأسس تُطرح شرط أن يكون الأساس نفسه.

2) $\frac{x^{n}}{x^{m}} = x^{n-m}$

★ عند الانتقال من البسط إلى المقام والعكس نُغير إشارة الأس.

3) $\frac{1}{x^{n}} = x^{-n}$ 4) $(x^{n})^{m} = x^{n.m}$ 5) $\sqrt[m]{x^{n}} = x^{\frac{n}{m}}$

أمثلة: أوجد ناتج ما يلي بأبسط صورة:

1) $x^3 - 2x - 4(x^3 + 5x)$

$x^3 - 2x - 4x^3 - 20x = -3x^3 - 22x$

2) $x^{\frac{1}{8}} . x^{\frac{1}{4}}$

$x^{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}} = x^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{x^3}$

3) $3x^2 (4x - 5x^{-2}) + 9$

$12x^3 - 15 + 9 = 12x^3 - 6$

4) $(5x + 1)(2 + x)$ ⟵ خاصية التوزيع

$10x + 5x^2 + 2 + x = 5x^2 + 11x + 2$

5) $(9x^2 + 3x + 1)(3x - 1)$

$27x^3 - 1$

6) $3x(x - 2)(x + 2)$

$3x(x^2 - 4) = 3x^3 - 12x$

7) $(\sqrt{4x} - 6)(\sqrt{4x} + 6) = 4x - 36$

8) $5 - x^4 (x^{-1} + x^{-2})$

$5 - x^3 - x^2$

9) $(2x - 5)^2$

$4x^2 - 20x + 25$

10) $(x + 2)^3$

$x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 8$

11) $7(x - 5) - 2x(4 + x)$

$7x - 35 - 8x - 2x^2 = -2x^2 - x - 35$

حل المعادلات طريقة الحذف

مثال: أوجد حل أنظمة المعادلات التالية:

1) $a - b = 3$ .... (1)
$3a - 2b = 6$ ... (2)

المعادلة $(1) \rightarrow -2 \rightarrow -2a + 2b = -6$

$3a - 2b = 6$

$a = 0 \rightarrow 0 - b = 3 \rightarrow \boxed{b = -3}$

2) $4x - 6x = 5y$ .... (1)
$10y - 8x = 2$ ... (2)

3) $a + b + c = 2$ .... (1)
$2a + 2b - c = 0$ .... (2)
$3b - a + 2c = 4$ .... (3)

4) $9x^2 - 4y^2 = 5$ ... (1)
$3x^2 + 2y^2 = 8$ .... (2)

حل المعادلات بطريقة التعويض

أوجد حل المعادلات التالية:

1) $a - b = 2$ ..... (1)
$4a + b = 6$ .... (2)

$a - 2 = b \longrightarrow$ تعويض في (2) $\longrightarrow 4a + a - 2 = 6 \rightarrow 5a = 8 \rightarrow a = \frac{8}{5}$

$\frac{8}{2} - \frac{5\times2}{5\times1} = b \longrightarrow \frac{8-10}{5} = b \longrightarrow \boxed{\frac{-2}{5} = b}$

2) $ab = 2$ ... (1) $\longrightarrow a = \frac{2}{b} \longrightarrow$ بالتعويض في (2)

$b^2 + a^2 = 4$ ... (2) $\quad (b^2 + \frac{4}{b2} = 4) \times b^2$

$b^4 + 4 = 4b^2 \longrightarrow b^4 - 4b^2 + 4 = 0$

$(b^2 - 2)(b^2 - 2) = 0$

$b^2 - 2 = 0 \longrightarrow b^2 = 2 \longrightarrow b = \pm\sqrt{2}$

$a = \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{-\sqrt{2}}$

تمرين: أوجد حل المعادلات التالية:

1) $-2x + 3y = 11$
$2x - 5y = -13$

2) $8x2 + 6y2 = 36$
$2y - x = 0$

ثانيًا: الاقتران النسبي

$$\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}} \longrightarrow \text{المجال} \longrightarrow R - \{\text{أصفار المقام}\}$$

مثال: أوجد مجال الاقترانات التالية:

1) $f(x) = \frac{5}{x-2} \longrightarrow R - \{2\}$

2) $f(x) = \frac{2x}{x^2-x-6} \longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \longrightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$R - \{3, -2\}$

3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2} \longrightarrow$

4) $f(x) = \frac{2x}{x^2+x} \longrightarrow$

5) $f(x) = \frac{x+2}{x^3-8} \longrightarrow$

6) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-6} \longrightarrow$

العمليات الحسابية على الاقتران النسبي

مثال: أوجد ناتج ما يلي: **(الضرب)**

1) $\frac{x-2}{x} \times \frac{3+x}{x-2}$

$$= \frac{(x-2)(3+x)}{x(x-2)} = \frac{3x+x^2-6-2x}{x^2-2x} = \frac{x^2+x-6}{x^2-2x}$$

2) $\frac{4x}{4x-1} \times \frac{x+1}{5x} =$

3) $\frac{x+4}{3-x} \times \frac{x-4}{3x} =$

4) $(x+5) \times \frac{(x^2-2x-8)}{x-4} =$

مثال: أوجد ناتج ما يلي: **(القسمة)**

القاعدة: $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$

1) $\frac{\frac{x-2}{x+4}}{\frac{x+5}{x-2}} = \frac{x-2}{x+4} \times \frac{x-2}{x+5} = \frac{(x-2)^2}{x^2+5x+4x+20} = \frac{x^2-4x+4}{x^2+9x+20}$

2) $\frac{\frac{4x-1}{3-x}}{6x} =$

3) $\frac{4-x}{\frac{x-2}{x+1}} =$

مثال: أوجد ناتج ما يلي **(جمع وطرح)**

1) $\frac{3x}{x-2} + \frac{6\cancel{x}}{\cancel{x}}$

2) $\frac{2x}{5+x} + \frac{6-x}{1+x}$

3) $\frac{6}{x-2} - \frac{4+x}{x+2}$

تمرين: أوجد ناتج ما يلي:

1) $\frac{x+2}{x-1} - \frac{4}{x+3}$

2) $\frac{6}{x^3} - \frac{5}{x^2}$

3) $\frac{x+2}{9-x^2} + \frac{x+5}{3+x}$

4) $\frac{1-x^2}{x} - 4$

تمرين: حلل المقادير التالية بأبسط صورة ثم أختصر

1) $\frac{x^2+x}{1+x}$

2) $\frac{5x^2-6x^3}{x^4}$

3) $\frac{x^3-27}{x^2-x-6}$

4) $\frac{x^2+x^3-5x-5}{x^2-1}$

ثالثًا: الجذور الفردية والزوجية:

1) الجذور الفردية: $\sqrt[3]{}\ ,\ \sqrt[5]{}\ ,\ \sqrt[7]{}$

الجذور الفردية معرفة على $\{R\}$ إذا كان ما تحتها معرف.

مثال: أوجد مجال الاقترانات التالية:

1) $f(x) = \sqrt[3]{5x^2+4}$ — المجال R

2) $f(x) = 3x^2 + \sqrt[5]{7x+2}$ — المجال R

3) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-2}}$ — المجال $R-\{2\}$

2) الجذور الزوجية: $\sqrt{}\ ,\ \sqrt[4]{}\ ,\ \sqrt[6]{}$

إذا كان $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$، حيث n عدد زوجي فإن مجال $f(x)$ هو $g(x) \geq 0$

مثال: أوجد مجال الاقترانات التالية:

1) $f(x) = \sqrt{49-x^2}$

$x^2 - 49 = 0 \longrightarrow x^2 = 49 \longrightarrow x = \pm 7$

+++ | − − − − | +++
−7 7

المجال $\Longleftarrow (-\infty, -7] \cup [7, \infty)$

2) $f(x) = \sqrt{x+4}$

$x + 4 = 0 \longrightarrow x = -4$

− − − | +++
−4

المجال $\Longleftarrow [-4, \infty)$

3) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow (x-3)(x-2) \quad x = 3, 2$

+++ | − − − − | +++
2 3

المجال $\Longleftarrow (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

معلومات مهمة بخصوص الفترات:

➡ $-2 < x \leq 4$ ➡ $x \in (2-, 4]$

➡ $x < -1, x \leq 1$ ➡ $x \in (-\infty , -1] \cup [1, \infty)$

العمليات على الجذور:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

مثال: أوجد ما يلي بأبسط صورة:

1) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

2) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

3) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\ \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

4) $5\sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$

5) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

6) $\sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$

7) $(5 - 2\sqrt{2})^2 = (25 - 5(2)(2\sqrt{2}) + 4(2) = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$

8) $\sqrt{(h-2)^2} = |h - 2|$

9) $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$

10) $\frac{5}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{5}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} = 5(x+1)^{\frac{-2}{3}}$

11) $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

12) $\frac{6\sqrt{x}}{(2x^2)(3x)} = \frac{\cancel{6}\, x^{\frac{1}{2}}}{\cancel{6}\, x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}} = x^{\frac{-2}{2}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

13) $\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = \sqrt{(3x+1)(3x+1)} = \sqrt{(3x+1)^2} = |3x + 1|$

حل المعادلات التي تحتوي على جذور

مثال: أوجد حل المعادلات التالية:

$1)\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \sqrt{4x+2} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{4x+2}$

$\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \sqrt{2(2x+1)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2}\sqrt{2x+1}$ ضرب تبادلي

$1 = \sqrt{2}(2x+1) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = 2x+1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 2x$

$2)\ x - \sqrt{x} - 6 = 0 \rightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) = 0$

$\sqrt{x} - 3 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow \boxed{x = 9} \rightarrow \sqrt{x} + 2 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \rightarrow \boxed{x = 4}$

$3)\ (2x\sqrt{x} + 2x) - (6\sqrt{x} - 6) = 0$

$2x(\sqrt{x}+1) - 6(\sqrt{x}+1) = 0 \rightarrow (\sqrt{x}+1)(2x-6) = 0$

$\sqrt{x} + 1 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = -1 \rightarrow \boxed{x = 1} \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow \boxed{x = 3}$

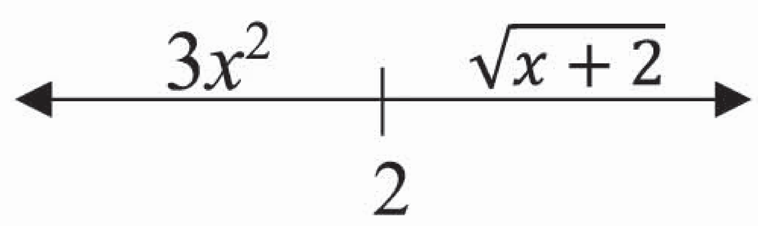
رابعًا: الاقتران المتشعب

مثال: إذا كان: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & x > 2 \\ 3x^2 & x \le 2 \end{cases}$ ، أوجد $f(-2), f(6), f(2)$

$f(-2) \rightarrow 3(-2)^2 = 3 \times 4 = 12$

$f(6) \rightarrow \sqrt{6+2} = \sqrt{8}$

$f(2) \rightarrow 3(2)^2 = 12$



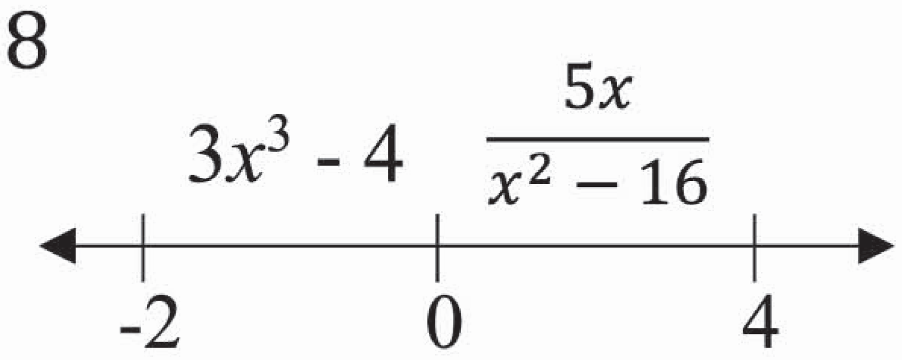
مثال: إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & -2 \le x < 0 \\ \frac{5x}{x^2-16} & 0 \le x < 4 \\ 27 - x & x = 4 \end{cases}$ ، أوجد $f(0), f(-2), f(4), f(1)$

$f(0) = \frac{5(0)}{0-16} = 0$

$f(-2) \rightarrow 3(-2)^3 - 4 = 3(-8) - 4 = -24 - 4 = -28$

$f(4) = 27 - 4 = 23$

$f(1) = \frac{5(1)}{1-16} = \frac{5}{-15} = \frac{-1}{3}$



خامسًا: اقتران القيمة المطلقة

رمزه ⬅ | | ⬅ يجعل القيم السالبة ⬅ موجبة

مثال: إذا كان $f(x) = |3x - 1|$، أوجد $f(3), f(-2)$

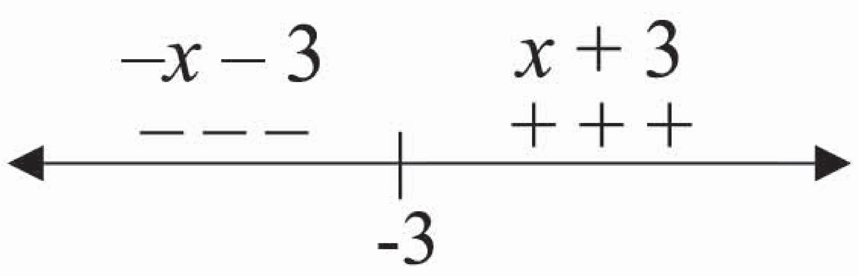
$$f(3) = |3(3) - 1| = |9 - 1| = |8| = 8$$

$$f(-2) = |3(-2) - 1| = |-7| = 7$$

مثال: إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة:

1) $f(x) = |x + 3|$

$\leftarrow x = -3 \leftarrow x + 3 = 0 \leftarrow$

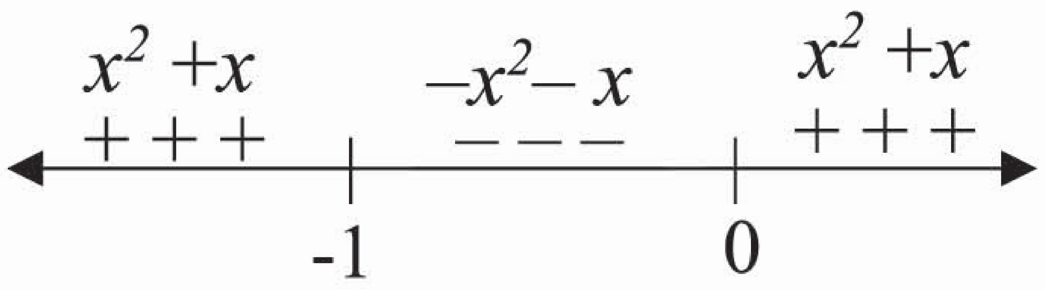


$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & x \le -3 \\ x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

⬅ ضع المساواة أينما تشاء

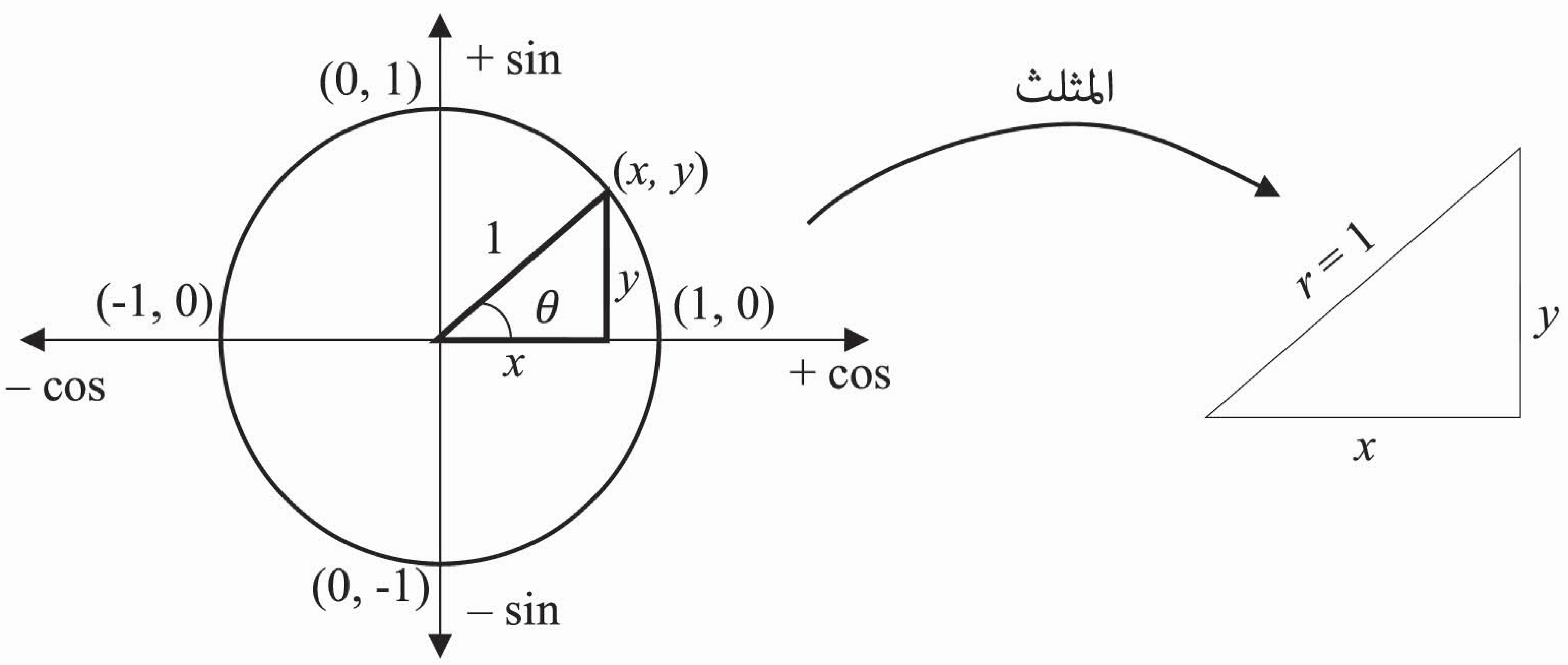
2) $f(x) = |x^2 + x|$

$x = 0, -1 \leftarrow x(x+1) = 0 \leftarrow x^2 + x = 0 \leftarrow$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < -1 \\ -x^2 - x & -1 \le x \le 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$$

سادسًا: الاقترانات المثلثية



دائرة الوحدة r = 1

جيب الزاوية $\rightarrow \frac{y}{1} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin\theta$

جيب تمام الزاوية $\rightarrow \frac{x}{1} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \cos\theta$

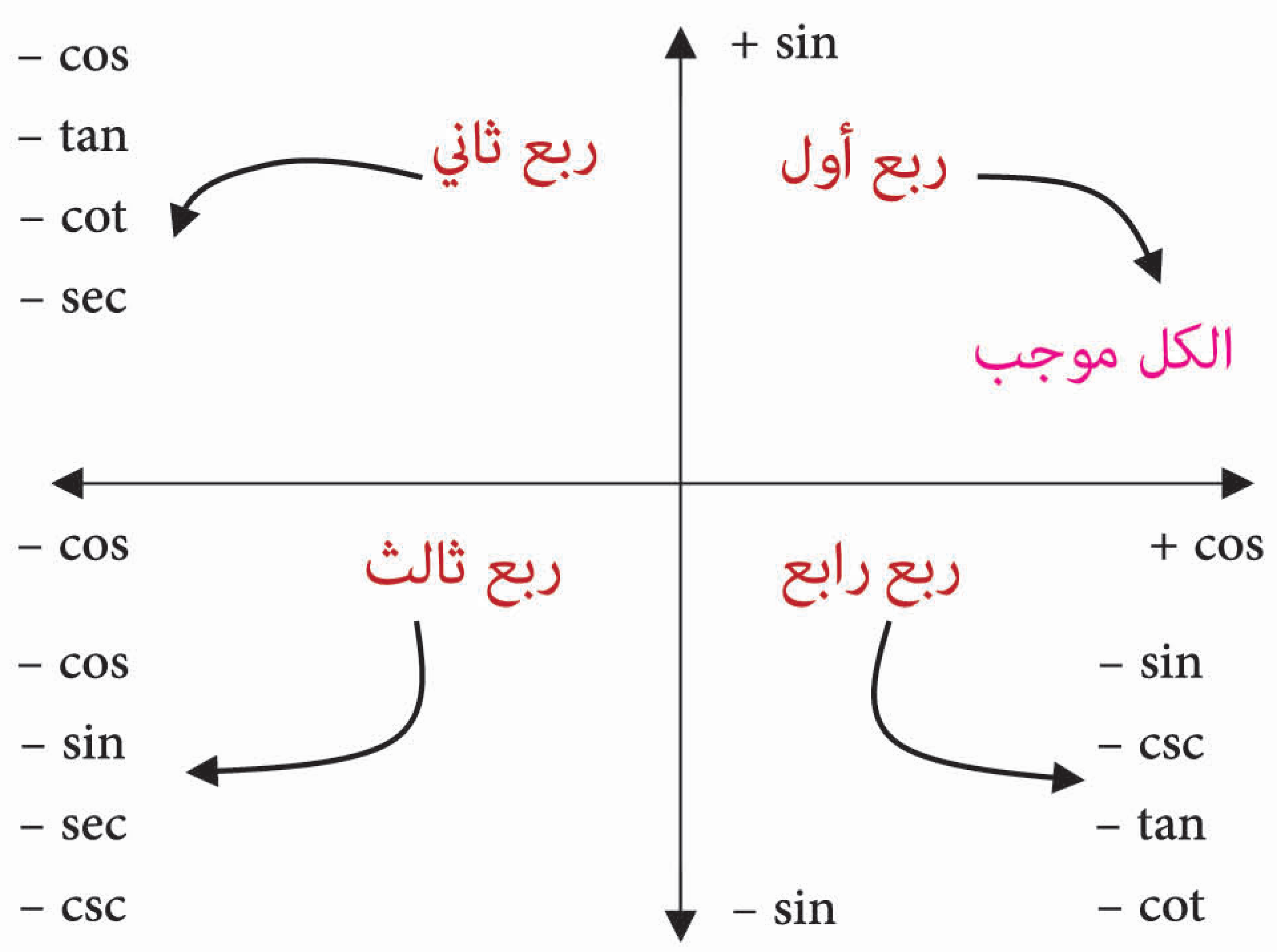
ظل الزاوية $\rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \tan\theta$

ظل تمام الزاوية $\rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \cot\theta$

قاطع الزاوية $\rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \sec\theta$

قاطع تمام الزاوية $\rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \csc\theta$

تُستخدم دائرة الوحدة لمعرفة إشارة الأرباع لكل نسبة مثلثية



التحويل بين التقدير الدائري والتقدير الستيني (الدجات)

1) إلى دائري ← من ستيني (الدرجات)

الزاوية $\frac{\pi}{180} \rightarrow 90^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$

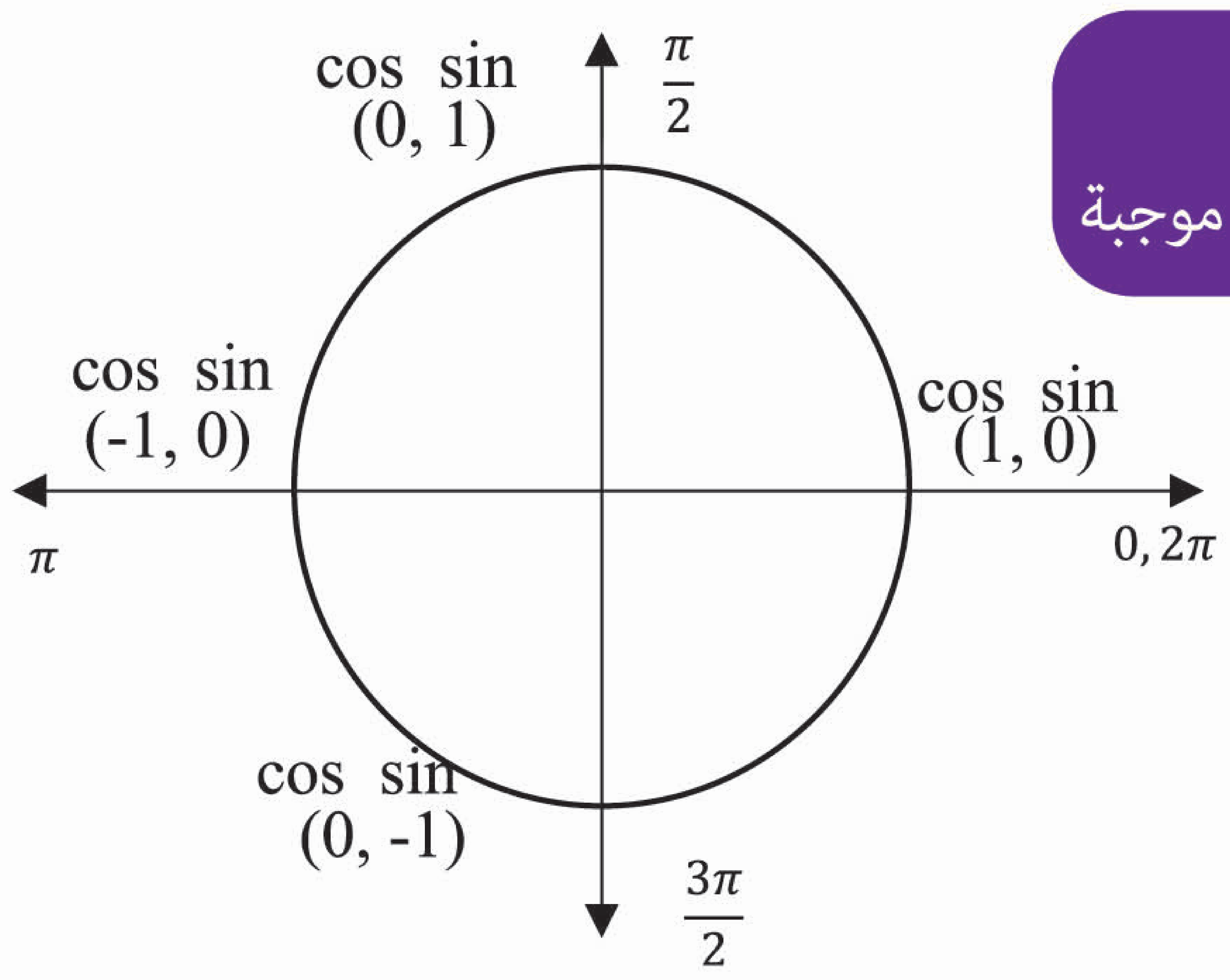
2) إلى الستيني ⟵ من دائري (rad)

$$180 \leftarrow \pi \text{ التعويض مكان } \rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{3(180)}{2} = 270^\circ$$

تُستخدم دائرة الوحدة لمعرفة النسب المثلثية لزوايا الربعية (الزوايا المحورية)

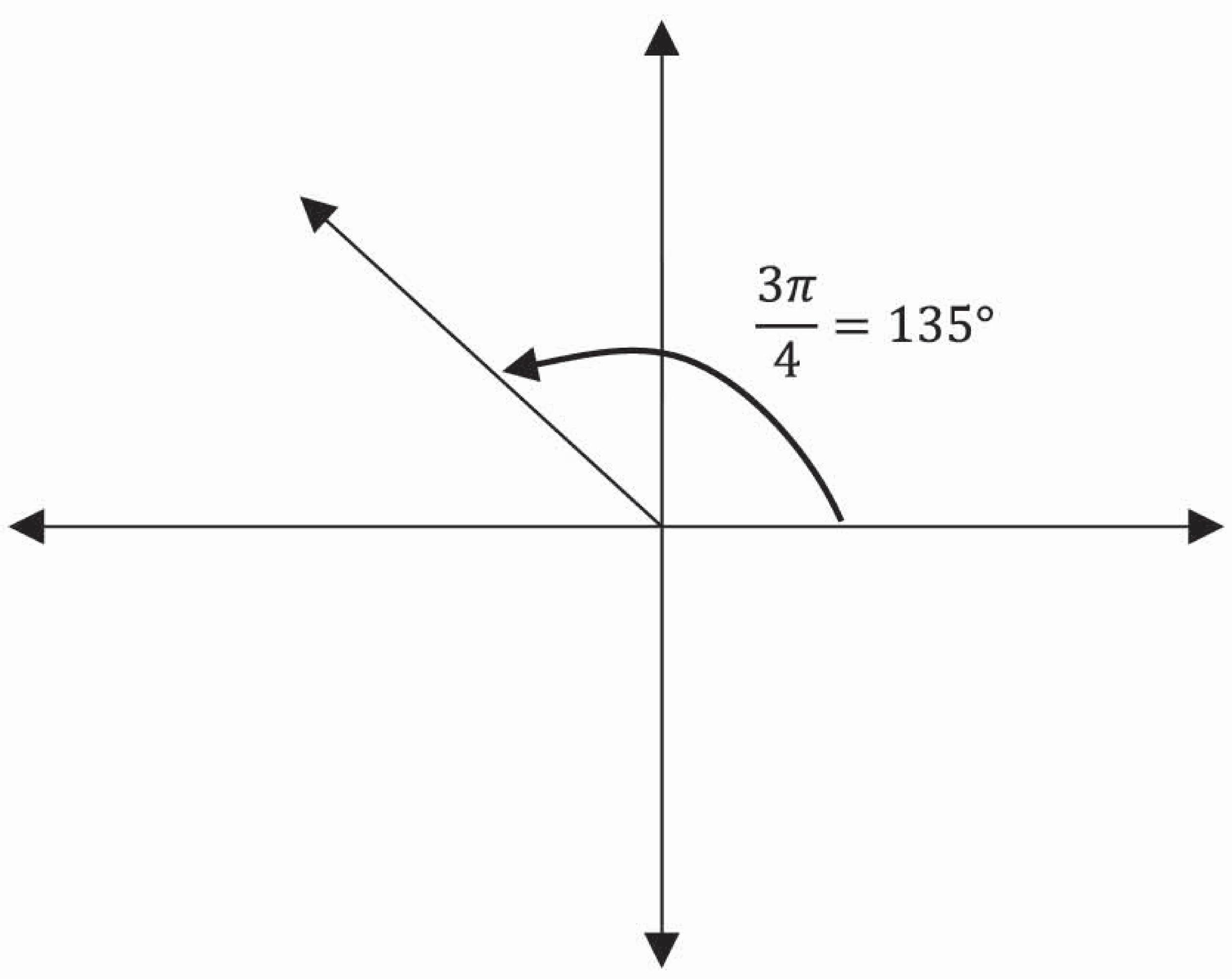
تذكر: تقاس الزاوية من ضلع الابتداء محور (X) الموجب

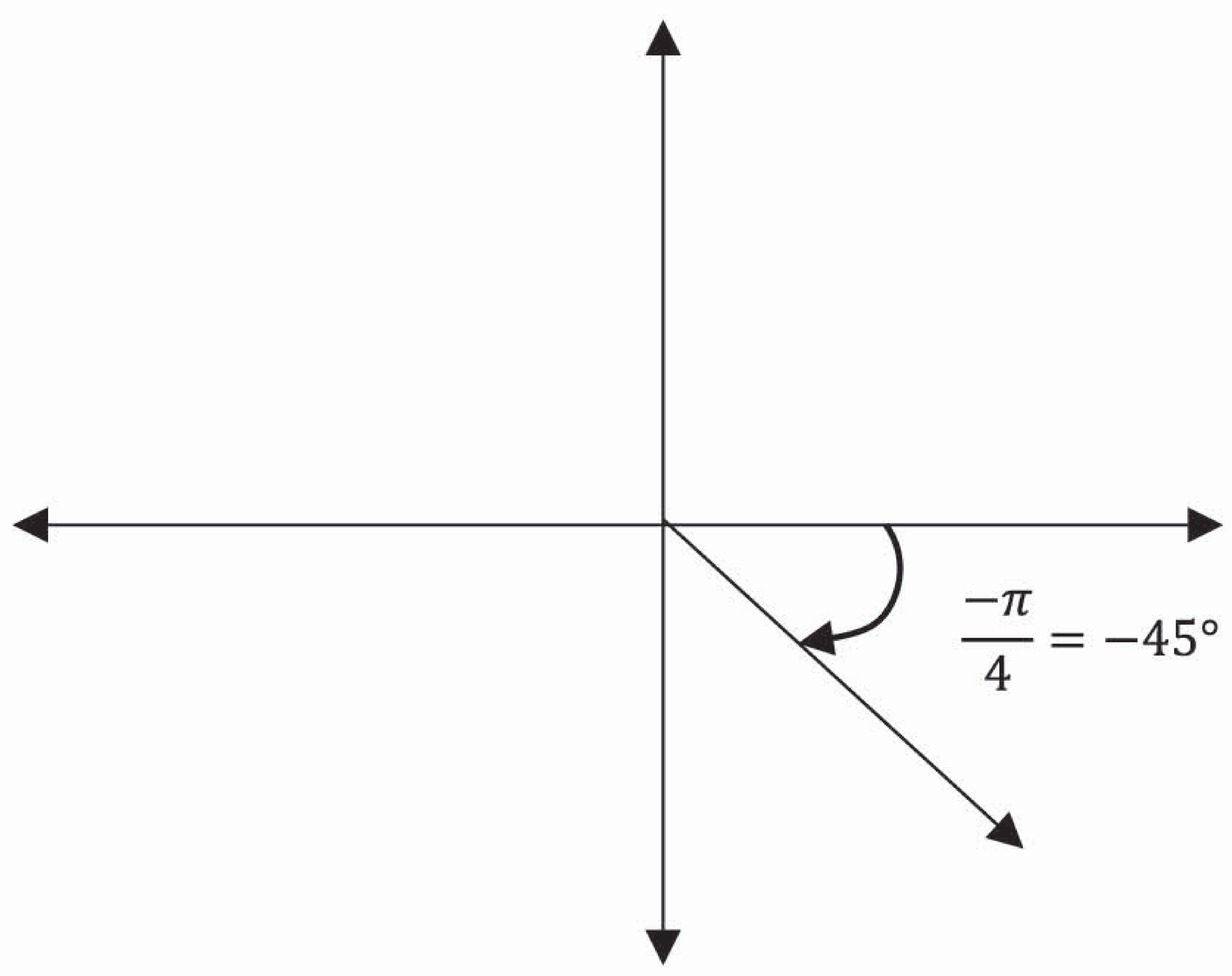
عندما يكون اتجاه القياس **عكس عقارب** الساعة تكون الزوايا موجبة



دائرة الوحدة

أما عندما يكون قياس الزاوية **مع عقارب** الساعة تكون الزوايا سالبة.





مثال: حوّل الزوايا التالية من ستيني إلى راديان (دائري)

1) $330^\circ =$ ----------------
2) $135^\circ =$ ----------------
3) $240^\circ =$ ----------------
4) $540^\circ =$ ----------------

مثال: حوّل الزوايا التالية من النظام الدائري إلى الستيني:

1) $\frac{2\pi}{3} =$ -----------------
2) $3\pi =$ -----------------
3) $\frac{5\pi}{6} =$ -----------------
4) $\frac{4\pi}{3} =$ -----------------

مثال: أوجد النسب المثلثية لزوايا الربعية التالية:

1) $\sin O =$ -------------- 2) $\cos \pi =$ ------------- 3) $\tan \frac{\pi}{2} =$ -------------

4) $\sec \frac{3\pi}{2} =$ ------------- 5) $\csc \pi =$ ------------- 6) $\cos O=$ -------------

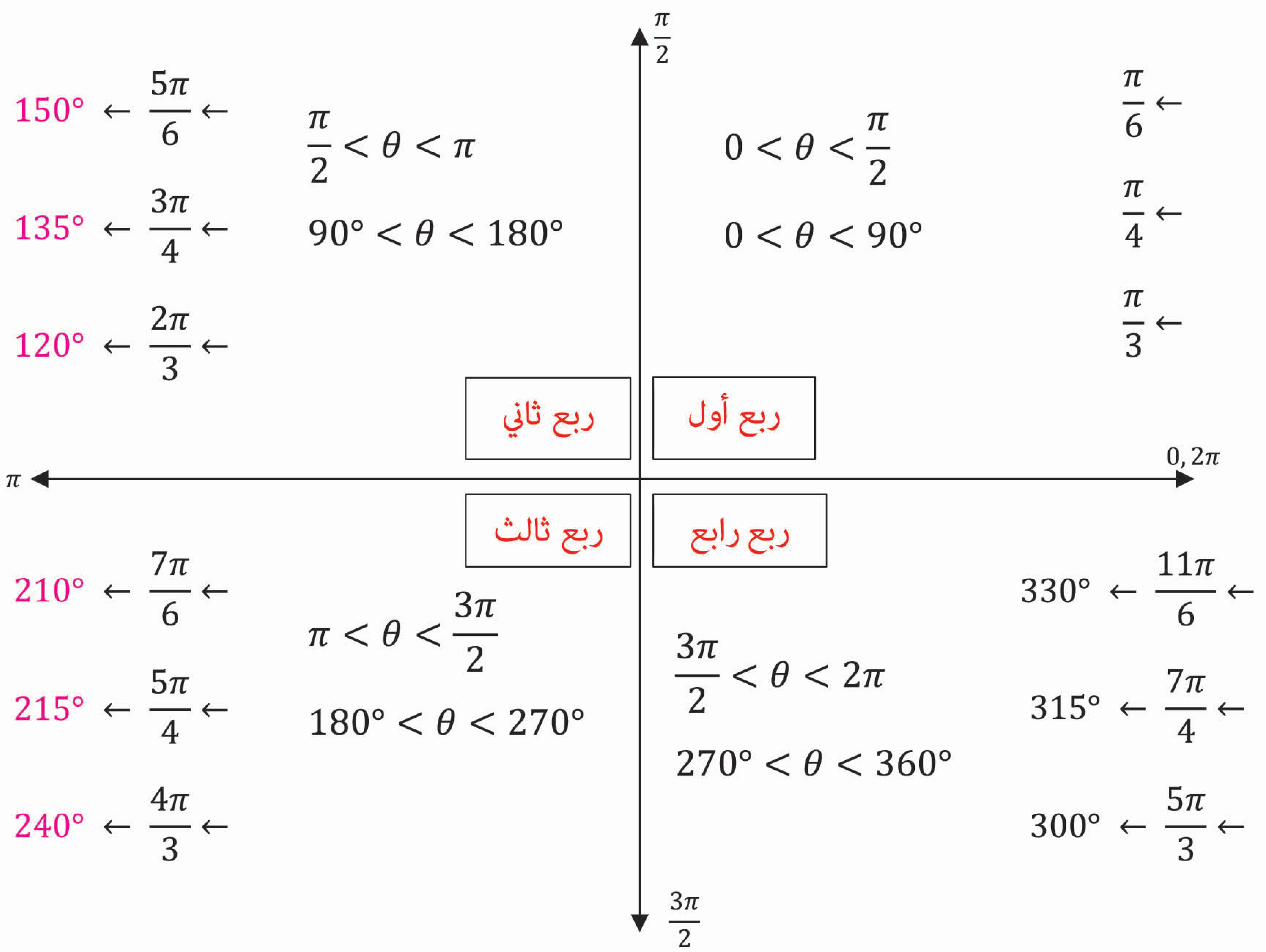
7) $\tan 3\pi =$ ------------ 8) $\sec 4\pi =$ ----------- 9) $\sin \frac{3\pi}{2} =$ ------------

10) $\tan \frac{\pi}{4} =$ ------------- 11) $\sin \frac{-\pi}{2} =$ ------------- 12) $\cos - \pi =$ --------

الزوايا الخاصة للربع الأول (حفظ زي اسمك)

الزوايا	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$(30°)\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$(45°)\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$(60°)\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

لا تحفظ قبل الحصول على طريقة الحفظ في الدورة التأسيسية على قناة الأستاذ أحمد طلافحة - يوتيوب.



مثال: أوجد النسب المثلثية للزوايا التالية:

1) $sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ = --------------

2) $\cos\frac{4\pi}{3}$ = -------------

3) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$= ----------------

4) $\cot\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ = -------------

5) $\sec\frac{2\pi}{3}$ = ------------------

6) $\csc\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ = -------------

مثال: عوّض قيمة الزوايا التالية بالاقترانات الدائرية؟

1) $f(x) = 2\cos x - 3\sin x$

أوجد: $f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$$\to f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\to f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}-3}{2}$$

$$\to f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\to f\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

2) $f(x) = \frac{1+\tan x}{1-\cos x}$

أوجد: $f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f\left(\frac{5\pi}{3}\right), f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

تمرين: عوّض قيمة الزوايا التالية بالاقترانات الدائرية:

1) $f(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

أوجد: $f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f(3\pi)$

2) $f(x) = sec^2 x - \tan(2x)$

أوجد: $f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

حل المعادلات المثلثية:

مثال: أوجد حل المعادلات التالية:

1) $\sin x = -1 \quad , x \in [0, 2\pi]$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

2) $\cos x = 1 \quad , x \in [0, 2\pi]$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

3) $\tan x = -1 \quad , x \in [0, 2\pi]$

$$x = \frac{3\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}$$

3) $\sin x = \frac{1}{2} \quad , x \in [0, 3\pi]$

$$x = \frac{\pi}{6} , \frac{11\pi}{6} , \frac{13\pi}{6}$$

تمرين: أوجد حل المعادلات التالية:

1) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , x \in [0, 2\pi]$

2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , x \in [0, 2\pi]$

3) $\tan x \sqrt{3} \quad , x \in [\pi, 2\pi]$

مثال 2: أوجد قيمة (x) فيما يلي:

1) $3\cos x + 3 = 0 \quad , x \in [0, \pi]$

$$3 \cos x = -3 \rightarrow \cos x = -1 \rightarrow x = \pi$$

2) $2\sin x + 1 = 0 \quad , x \in [0, 2\pi]$

$$2 \sin x = -1 \rightarrow \sin x = \frac{-1}{2}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} , \frac{11\pi}{6}$$

تمرين: أوجد حل المعادلات التالية:

1) $\sqrt{3} \sin x + 1 = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

2) $2cosx + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad , \quad x \in [0, \pi]$

مثال 3: حل المعادلات التالية:

1) $4sin^2x = 1 \quad , \quad x\, [0, 2\pi]$

$$sin^2x = \frac{1}{4} \rightarrow sinx = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} . \frac{5\pi}{6} , \frac{7\pi}{6} , \frac{11\pi}{6}$$

2) $3tan^2x - 1 = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

مثال 4: حل المعادلات التالية:

1) $sin^2x - sinx - 2 = 0 \quad , x \in [0, 2\pi]$

$$(sinx + 1)(sinx - 2) = 0$$

$$sinx - 2 = 0 \rightarrow sinx \neq 2$$

$$sinx + 1 = 0 \rightarrow sinx = -1 \rightarrow x = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$$

2) $tam^2x - 2tanx + 1 = 0 \quad , x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

مثال 5: حل المعادلات التالية:

1) $cosx + sinx = 0 \quad , x \in [0, \pi]$

$$cosx = -sinx \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}$$

2) $sinx - \sqrt{3}\, cosx = 0 \quad , x \in [0, \pi]$

3) $tan^2x - tanx = 0 \quad , x \in [0, 2\pi]$

4) $sin2x \quad , x \in [0, 2\pi]$

تمرين: حل المعادلات التالية:

1) $\sqrt{2} \sin x \cos x - \sin x = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

2) $cos3x = -1 \quad , x \in [0, \pi]$

3) $\cos x - \sin x = 0 \quad , x \in [0, 2\pi]$

انتهت الدوسية
تأسيس لطلبة التوجيهي العلمي والصناعي
إعداد الأستاذ أحمد طلافحة